



## Mathematics Talent Reward Programme (MTRP), 2026

**Disclaimer:** MTRP is an initiative of the students of Indian Statistical Institute, Kolkata, as a part of their annual techno-cultural-sports fest, Integration, to bolster the love for mathematics among all. This is to clarify that Indian Statistical Institute itself does NOT conduct this event.

Full Marks: 100

Category: Junior

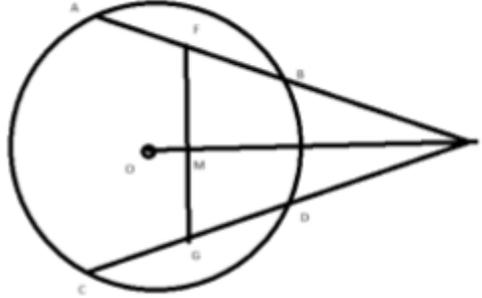
Time: 3 hours

Part A এবং B তে প্রতিটি প্রশ্নের মান 4। প্রতিটি সঠিক উত্তর যথাযথ যুক্তিসহ দিলে 4 নম্বর প্রদান করা হবে, যুক্তি ছাড়া সঠিক উত্তরের জন্য 1 নম্বর দেওয়া হবে।

### Part A: বহু নির্বাচনী প্রশ্ন (MCQ)

(5 × 4 = 20)

1.  $45^{4053}$  সংখ্যাটিকে 2027 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (2027 একটি মৌলিক সংখ্যা)  
(A) 1 (B) 45 (C) 2026 (D) উপরের কোনোটিই নয়
2. নিচের চিত্রে একটি বৃত্ত আছে যার কেন্দ্র  $O$ ।  $AB$  এবং  $CD$  দুটি জ্যা যেগুলি বর্ধিত করলে  $E$  বিন্দুতে ছেদ করে।  $F$  এবং  $G$  যথাক্রমে  $AB$  এবং  $CD$ -এর মধ্যবিন্দু।  $OE$  এবং  $FG$  রেখা  $M$  বিন্দুতে ছেদ করে।  $\angle GFE + \angle FME - \angle FGE$  এর মান নির্ণয় কর।



- (A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{2}$  (C)  $\pi$  (D) সর্বদা ধ্রুবক নয়
3. কতগুলো ক্রমহীন(unordered) ত্রয়ী  $(a, b, c)$  আছে যেখানে  $a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  এবং  $2^a + 2^b + 2^c$  একটি পূর্ণঘন(perfect cube) সংখ্যা?  
(A) 1 (B) 6 (C) 4 (D) 3
4. জেক একটি ক্রিসমাস ডেকোরেশনের দোকানে গিয়ে 12টি candy cane এবং 10টি jingle bell কিনল। প্রতিটি জিনিসের দাম একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং candy cane-এর দাম jingle bell-এর চেয়ে বেশি। নিচের কোন বিকল্পটি মোট বিলের একটি সম্ভাব্য মান হতে পারে?  
(A) 110 (B) 132 (C) 146 (D) 155
5. একটি একক ব্যাসার্ধের গোলকের উপর 100টি বিন্দু আছে। কতভাবে 3টি বিন্দু নির্বাচন করা যায় যাতে তারা একই অর্ধগোলকের উপর থাকে?  
(A)  $\binom{100}{3}$  (B)  $\binom{100}{3}$  (C)  $\binom{100}{3}$  (D)  $\binom{100}{2}$

**Part B: পূর্ণসংখ্যা ধর্মী প্রশ্ন****(5 × 4 = 20)**

- ধরা যাক  $(a_1 + a_2 + \dots + a_{12})^{24}$  এর প্রসারণে যেসব পদে প্রতিটি চলকের ঘাত জোড় সংখ্যা, সেসব পদের সংখ্যা  $N$ ।  $N$  কে 13 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? [উদাহরণ :  $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$  এখানে প্রতিটি চলকের সব ঘাত জোড় এমন পদের সংখ্যা  $1 + 6 + 1 = 8$ ]
- একটি 24-ঘণ্টার ডিজিটাল ঘড়িতে দুটি অঙ্ক নষ্ট হয়ে গেছে এবং সেগুলি সবসময় ভুল সংখ্যা প্রদর্শন করে। এক সময় ঘড়িতে 19 : 40 দেখা গেল এবং 31 মিনিট পরে ঘড়িতে 00 : 27 দেখা গেল। যদি সেই মুহূর্তে প্রকৃত সময়  $AB : CD$  আকারে লেখা হয়, তবে  $(A + B + C + D)$  এর মান নির্ণয় কর।
- আমরা  $k$  টি ভিন্ন (Distinct) অক্ষরের একটি শ্রেণিকে  $k$ -super বলি, যদি এটি এমন ক্ষুদ্রতম সম্ভব শ্রেণি (string) হয় যাতে ঐ  $k$  টি অক্ষরের সব  $k!$  টি বিন্যাস (permutation) উপশ্রেণি (substring) হিসেবে উপস্থিত থাকে।  
উদাহরণস্বরূপ, 3 টি অক্ষর  $[A, B, C]$  এর ক্ষেত্রে  $ABCABACBA$  শ্রেণিটি একটি 3-super শ্রেণি এবং এর দৈর্ঘ্য 9। একটি 4-super শ্রেণির দৈর্ঘ্য কত?
- ধরা যাক  $\triangle ABC$  একটি ত্রিভুজ, যেখানে  $AB = 6$ ,  $BC = 8$  এবং  $CA = 10$ ।  $\triangle ABC$ -এর অন্তঃকেন্দ্রকে  $AB$ ,  $BC$  এবং  $CA$  বাহুর সাপেক্ষে প্রতিফলিত করলে যথাক্রমে  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  পাওয়া যায়।  
যদি  $\triangle A'B'C'$ -এর ক্ষেত্রফল  $\frac{m}{n}$  হয়, যেখানে  $m, n$  পরস্পর মৌলিক, তবে  $|m - n|$  নির্ণয় কর।
- ধরা যাক  $P(x)$  একটি বাস্তব সহগবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা, যার ঘাত 2026 এবং যা নিম্নলিখিত শর্তটি পূরণ করে

$$(\cos^{2026} \theta)P(\tan \theta) = (\sin^{2026} \theta)P(\cot \theta) \quad \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$P(x)$ -এর সব বীজের গুণফল নির্ণয় কর।

**Part C: বর্ণনামূলক প্রশ্ন****(6 × 10 = 60)****1. একটি অদ্ভুত আবিষ্কার**

একদিন গণিতের ক্লাসে আত্মদীপ তার বন্ধুদের একটি ছোট সংখ্যার পরীক্ষা করতে বলল। সে তাদের বলল আটটি ক্রমিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা নির্বাচন করতে। প্রত্যেকে তাদের নির্বাচিত সংখ্যাটির বর্গ করল এবং তারপর সব পূর্ণবর্গ সংখ্যাগুলো যোগ করা হল।  
অবাক করার মতো বিষয় হল,

প্রতিবারই এই আটটি বর্গসংখ্যার যোগফল একটি মৌলিক সংখ্যার চার গুণের সমান হচ্ছিল।

এরপর আত্মদীপ বিষয়টি নিয়ে কৌতূহলী হয়ে ওঠে এবং এই ধরণটি আরও মনোযোগ দিয়ে পর্যবেক্ষণ করতে শুরু করে। অনেক উদাহরণ পরীক্ষা করার পর সে একটি আশ্চর্য নিয়ম আবিষ্কার করে:

যখনই যোগফলটি  $4p$  আকারের হয়, যেখানে  $p$  একটি মৌলিক সংখ্যা, তখন  $p + 1$  সর্বদা 12 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

তুমি কি আত্মদীপকে বোঝাতে পারবে কেন  $p + 1$  অবশ্যই 12 দ্বারা বিভাজ্য হবে?

**2. বহুপদীর বীজ গণনা**

ধরা যাক  $P(x)$  একটি পূর্ণসহগবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা যার ঘাত  $d$ । প্রমাণ কর যে  $P(x)^2 - 1$  এর সর্বাধিক  $d + 2$  টি ভিন্ন বীজ থাকতে পারে যেগুলি পূর্ণসংখ্যা।

**3. কার্ড নিয়ে একঘেয়ে বিকেল**

একঘেয়ে এক বিকেলে হাতে বিশেষ কোনো কাজ না থাকায় অহন ও শৌনক একটি খেলা খেলার সিদ্ধান্ত নিল। তারা কিছু কার্ড জোগাড় করে সেগুলোকে চারটি সারিতে সাজাল, যেখানে প্রতিটি সারিতে 20 টি করে কার্ড ছিল।

□ অহন প্রতি চালে এক একটি করে কার্ড একটি সারি থেকে অন্য সারিতে সরায়।

□ যদি অহন  $A$  সারি থেকে  $B$  সারিতে একটি কার্ড সরায়, তবে শৌনক তাকে

$$(A \text{ সারিতে কার্ডের সংখ্যা}) - (B \text{ সারিতে কার্ডের সংখ্যা})$$

পরিমাণ টাকা দেয়। এখানে সংখ্যাগুলি কার্ড সরানোর **ঠিক আগের অবস্থায়** গণনা করা হয়।

□ যদি এই সংখ্যাটি ঋণাত্মক হয়, তবে অহন সেই পরিমাণ টাকা শৌনককে দেবে। (অহনের টাকা শেষ হয়ে গেলে সে শৌনককে টাকাটা পরেও দিতে পারে।)

□ যদি কোনো মুহুর্তে চারটি সারিতেই **সমান সংখ্যক কার্ড** থাকে, তবে শৌনক চাইলে সঙ্গে সঙ্গে খেলা বন্ধ করতে পারে অথবা খেলা চালিয়ে যেতে দিতে পারে।

2026 টি চালের পরে খেলা বন্ধ হয়। সম্ভাব্য সর্বকম চালের ক্রমের পরিপ্রেক্ষিতে, খেলার শেষে লাভ-ক্ষতি মিলিয়ে অহনের **মোট আয়ের** সর্বাধিক এবং সর্বনিম্ন সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

#### 4. মৌলিক সংখ্যার গুণফলের একটি ধারা

প্রমাণ কর যে

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ মৌলিক}}} p < 4^n$$

প্রতিটি  $n \in \mathbb{N}$  এর জন্য।

#### 5. জেতা কি সম্ভব?

আর্থনীল একটি ব্ল্যাকবোর্ডে  $n$  টি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা  $x_1, x_2, \dots, x_n$  লেখে এবং অর্ণবকে চ্যালেঞ্জ করে  $n$  টি বাস্তব সংখ্যা  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq 0$  লিখতে, যাতে প্রতিটি  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  এর জন্য

$$\sum_{i=1}^k y_i \leq \sum_{i=1}^k x_i$$

শর্তটি পূরণ হয়।

অর্ণব চ্যালেঞ্জটি জিতবে যদি

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 > \sum_{i=1}^n x_i^2$$

হয়।

অর্ণব কি কখনও জিততে পারে? (ধরা যাক আর্থনীল সংখ্যাগুলি এলোমেলোভাবে বেছে নেয় এবং তার কোনো বিশেষ কৌশল নেই।)

#### 6. জাদুবৃত্তের জ্যামিতি

একজন জাদুকর একটি জাদুকরী বনে গাছগুলোকে রক্ষা করছে। সে মাটির উপর একটি জাদুকরী সুরক্ষা বৃত্ত আঁকতে পারে। বৃত্তের ভিতরে থাকা প্রতিটি গাছ দানবদের আক্রমণ থেকে সুরক্ষিত থাকে। বৃত্তের বাইরে থাকা প্রতিটি গাছ সুরক্ষিত নয়। জাদুকর এমনভাবে বৃত্ত আঁকতে চায় যাতে সে যে গাছগুলোকে বেছে নেয় ঠিক সেগুলোই বৃত্তের ভিতরে থাকে।

##### পর্ব ১: তিনটি গাছ

ধরা যাক বনে তিনটি গাছ আছে এবং তারা একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়। জাদুকর ইচ্ছামতো গাছ বেছে নিতে পারে যেগুলোকে সে সুরক্ষিত করতে চায়। উদাহরণস্বরূপ, সে তিনটিই গাছ সুরক্ষিত করতে পারে, কেবল একটি গাছ সুরক্ষিত করতে পারে, দুটি গাছ সুরক্ষিত করে তৃতীয়টিকে বাদ দিতে পারে, অথবা কোনো গাছই সুরক্ষিত না-ও করতে পারে।

জাদুকর কি সর্বদা এমন একটি বৃত্ত আঁকতে পারবে যাতে সে যে গাছগুলোকে বেছে নেয় ঠিক সেগুলোই বৃত্তের ভিতরে থাকে?

##### পর্ব ২: চারটি গাছ

এবার ধরা যাক বনে চারটি গাছ আছে (এই চারটি গাছের কোনো তিনটিই এক সরলরেখায় নয়)। আবারও জাদুকর ইচ্ছামতো গাছ বেছে নিতে পারে যেগুলোকে সে সুরক্ষিত করতে চায়। জাদুকর কি সর্বদা এমন একটি বৃত্ত আঁকতে পারবে যাতে সে যে গাছগুলোকে বেছে নেয় ঠিক সেগুলোই সুরক্ষিত হয়? নাকি এমন কোনো চারটি গাছের সমন্বয় আছে যার জন্য এটি সম্ভব নয়?

অবশেষে, সর্বাধিক কতটি গাছের ক্ষেত্রে জাদুকর সর্বদা এমন একটি বৃত্ত আঁকতে পারবে যাতে নির্বাচিত যেকোনো গাছের সমন্বয়কে সুরক্ষিত করা যায়?