Mathematics Talent Reward Programme (MTRP), 2026

Disclaimer: MTRP is an initiative of the students of Indian Statistical Institute, Kolkata, as a part of their annual techno-cultural-sports fest, Integration, to bolster the love for mathematics among all. This is to clarify that **Indian Statistical Institute itself does NOT conduct this event.**

Full Marks: 100 | Category: Senior | Time: 3 hours

Part A: বহু নির্বাচনী প্রশ্ন (MCQ) $(8 \times 3 = 24)$

1. কতগুলো ক্রমহীন(unordered) ত্রয়ী (a, b, c) আছে যেখানে $a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ এবং $2^{a!} + 2^{b!} + 2^{c!}$ একটি পূর্ণঘন(perfect cube) সংখ্যা?

   (A) 12 (B) 6 (C) 9 (D) 3

2. ধরা যাক $Q(x)$ একটি বাস্তব সহগবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা যার ঘাত 99। এখন প্রতিটি $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $Q(1+e^x) + Q(1-e^x) = Q(2)$ শর্তটি পূরণ হয়। $Q'(x)$ এর বীজগুলির যোগফল নির্ণয় কর।
   (A) 78 (B) 98 (C) 104 (D) 63

3. ধরা যাক $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2026}$ বাস্তব সংখ্যা যেখানে $\theta_i \geq 0\ \forall i \in \{1, 2, \cdots 2026\}$ এবং $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{2026} = 2\pi$. $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$ এবং $z_{k+1} = (\cos\theta_{k+1} + i\sin\theta_{k+1})z_k$. নিচের কোনটি/কোনগুলি সত্য?
   (A) $|z_2^2 - z_1^2| + |z_3^2 - z_2^2| + \cdots + |z_{2026}^2 - z_{2025}^2| \leq 4\pi$ এবং সমতা(equality) ঘটতে পারে
   (B) $|z_2^2 - z_1^2| + |z_3^2 - z_2^2| + \cdots + |z_{2026}^2 - z_{2025}^2| < 4\pi$
   (C) $|z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + \cdots + |z_{2026} - z_{2025}| < 2\pi$
   (D) B এবং C উভয়ই সত্য

4. ধরা যাক $ABCD$ একটি সামান্তরিক। E এবং F যথাক্রমে AB ও AD বাহুর উপর এমন দুটি বিন্দু যেখানে $BE : EA = 1 : 2$ এবং $AF : FD = 2 : 1$. যদি BF এবং DE রেখাংশ দুটি K বিন্দুতে ছেদ করে এবং $AC = 10$ হয়, তবে CK নির্ণয় কর।

   (A) 6 (B) 8 (C) $\frac{20}{3}$ (D) $\frac{21}{4}$

5. আমরা বলি একটি পূর্ণসংখ্যা n **বর্গমুক্ত** (square-free), যদি প্রতিটি মৌলিক সংখ্যা p এর জন্য n, p^2 দ্বারা অবিভাজ্য হয়। ধরা যাক $f(n)$ হল n-এর সমস্ত ধনাত্মক উৎপাদকের অনোন্যকগুলির যোগফল (যেমন, $f(4) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$)। আমরা বলি n একটি **অদ্ভুত সংখ্যা**, যদি $f(n) = 2$ হয়। এখন কতগুলি বর্গমুক্ত অদ্ভুত পূর্ণসংখ্যা আছে?

   (A) 1 (B) 2 (C) ২-এর বেশি কিন্তু সসীম সংখ্যক (D) অসীমসংখ্যক

6. ধরা যাক 2026 অঙ্কের, 9 দ্বারা বিভাজ্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি হল x। এখন x-এর অঙ্কগুলির সমষ্টি y এবং y-এর অঙ্কগুলির সমষ্টি z হলে z-এর সর্বাধিক সম্ভাব্য মান কত ?

   (A) 9 (B) 18 (C) 27 (D) 36

7. ধরা যাক $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি অপেক্ষক যেখানে $\int_\theta^{\theta+1} f(x)\,dx = 0$ প্রতিটি $\theta > 0$ এর জন্য। ধরা যাক $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ একটি সন্তত অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক এবং $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b g'(x)\,dx = 0$. নিচের কোনটি সত্য নয়?

   (A) যদি $g(x)$-এর (a, b)-এর মধ্যে একটি বীজ থাকে, তবে (a, b)-এর মধ্যে অন্তত দুটি বীজ থাকতে হবে

(B) যদি $g(x)$-এর $[a,b]$-এর মধ্যে একটি বীজ থাকে, তবে $[a,b]$-এর মধ্যে অন্তত দুটি বীজ থাকতে হবে

(C) $f(x)=0$ একমাত্র সন্তত সমাধান নয়

(D) যদি $f(x)$ সন্তত হয়, তবে $f(x)$ অবশ্যই একটি পর্যাবৃত্ত(periodic) অপেক্ষক।

8. ধরা যাক p,q,r তিনটি মৌলিক সংখ্যা, যাতে $p^2+q^2+r^2=p^3$। p,q,r-এর সব সম্ভাব্য মানের জন্য pqr-এর গড় মান নির্ণয় কর।

(A) 3 (B) 27 (C) 150 (D) উপরের কোনোটিই নয়

Part B: পূর্ণসংখ্যাধর্মী প্রশ্ন $(4 \times 4 = 16)$

1. একটি ২-মাত্রিক সমতল (2-dimensional plane) বিবেচনা করো। একটি পিঁপড়া $(0,0)$ বিন্দুতে দাঁড়িয়ে আছে এবং শুধুমাত্র এক একক উপরে (upwards) অথবা ডানে (rightwards) সরে সে $(20,20)$ বিন্দুতে পৌঁছাতে চায়। পিঁপড়াটির অতিক্রান্ত পথ, x-অক্ষ এবং $x=20$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের গড় মান নির্ণয় করো।

2. ধরা যাক $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ একটি অপেক্ষক, যা প্রতিটি $n\geq 1$ এর জন্য

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n^2f(n)$$

শর্তটি পূরণ করে। যদি $f(1)=2027$ হয়, তবে $\dfrac{1}{f(2026)}$ এর মান নির্ণয় কর।

3. চৌরঙ্গী হোটেলের দীর্ঘদিনের তত্ত্বাবধায়ক স্যাটা বোস একটি অদ্ভুত মিশ্রণ যন্ত্র (blending machine) তৈরি করেছেন। যখন x এবং y ঘনত্বের(strength) উজ্জ্বল তরলপূর্ণ দুটি বোতল এই যন্ত্রে রাখা হয়, তখন এটি $f(x,y)$ ঘনত্বের একটি নতুন বোতল তৈরি করে। স্যাটা বোস যন্ত্রটি কীভাবে কাজ করে তা প্রকাশ করবেন না, তবে তিনি একটি নিয়ম প্রকাশ করেছেন: যদি দুটি বোতল মেশানো হয় এবং তারপর প্রাপ্ত ফলাফলটিকে z ঘনত্বের তৃতীয় একটি বোতলের সাথে মেশানো হয়, তবে চূড়ান্ত ঘনত্ব সর্বদা নিচের শর্তটি পূরণ করে:

$$f(f(x,y),z)=\frac{xy+yz+zx}{xyz},\quad \text{সব } x,y,z>0 \text{ এর জন্য।}$$

তিনি একটি পরীক্ষা শুরু করেন, যেখানে প্রথম বোতলের ঘনত্ব $a_0=1$। প্রতিদিন তিনি একই পদ্ধতি অনুসরণ করেন: প্রথমে বর্তমান বোতলটিকে একটি একক ঘনত্বের (strength 1) বোতলের সাথে মিশ্রিত করেন, তারপর প্রাপ্ত ফলাফলটিকে পুনরায় আরেকটি একক ঘনত্বের বোতলের সাথে মিশ্রিত করেন। যদি n-তম দিন শেষে ঘনত্ব a_n হয়, তবে:

$$a_{n+1}=f(f(a_n,1),1),\quad n\geq 0$$

$\lfloor \lim_{n\to\infty} a_n\rfloor$ এর মান নির্ণয় করো। এখানে $\lfloor x\rfloor$ হলো বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা যা x-এর সমান বা ছোট।

4. সময় 0-তে, একটি পিঁপড়া $(1,0)$ বিন্দুতে এবং একটি মাকড়সা $(-1,0)$ বিন্দুতে অবস্থান করছে। পিঁপড়াটি একক বৃত্তের (unit circle) চারপাশ দিয়ে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (counterclockwise) হাঁটতে শুরু করে এবং মাকড়সাটি x-অক্ষ বরাবর ডানদিকে হামাগুড়ি দিতে শুরু করে। এটি দেখা যায় যে, পিঁপড়াটির অনুভূমিক গতিবেগ (horizontal speed) সর্বদা মাকড়সার গতিবেগের অর্ধেক। পিঁপড়া এবং মাকড়সার মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব কত হবে? যদি উত্তরটি $\sqrt{m}/4$ হয়, যেখানে m একটি স্বাভাবিক সংখ্যা, তবে m এর মান নির্ণয় করো।

Part C: বর্ণনামূলক প্রশ্ন $(5 \times 12 = 60)$

1. প্রবীর এবং অভিজিৎ একটি খেলা খেলে যেখানে তাদের কাছে $x^3+ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি আছে। প্রবীর খেলা শুরু করে এবং পর্যায়ক্রমে উভয়ে একে একে a,b,c এর মধ্যে একটি করে সহগ, যেটি তার আগে পর্যন্ত ব্যবহৃত হয়নি, নির্বাচন করে। ফলস্বরূপ প্রাপ্ত সমীকরণের 3 টি অসমান বাস্তব বীজ থাকলে প্রবীর জিতবে এবং অন্যথায় অভিজিৎ জিতবে। উভয়ের মধ্যে কারও যদি জয়ের কৌশল(winning strategy) থাকে তা খুঁজে বের কর। যদি কোনো জয়ের কৌশল না থাকে, তবে তা প্রমাণ কর।

2. ধরি $f : [a, b] \to (0, \infty)$ এবং $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ দুটি সন্তত অপেক্ষক। $g(a) = 0$ এবং $\int_a^b g(x)dx = 0$ । প্রমান করো যে, এরূপ একটি $c \in (a, b)$ রয়েছে যাতে

$$g(c) \int_a^c f(x)dx = f(c) \int_a^c g(x)dx.$$

হয়।

3. $n \geq 5$ জন খেলোয়াড় নিয়ে একটি দাবা প্রতিযোগিতা অনুষ্ঠিত হল। প্রতিটি খেলোয়াড় অন্যান্য সব খেলোয়াড়ের সঙ্গে একটি করে খেলা খেলেছে। একটি খেলায় জিতলে 1 পয়েন্ট, ড্র হলে $\frac{1}{2}$ পয়েন্ট এবং হারলে 0 পয়েন্ট পাওয়া যায়। প্রতিযোগিতা শেষে দেখা গেল প্রত্যেক খেলোয়াড়ের পয়েন্ট ভিন্ন।প্রমাণ কর যে দ্বিতীয় ও তৃতীয় স্থানাধিকারী খেলোয়াড়দের মোট পয়েন্ট প্রতিযোগিতার বিজয়ীর পয়েন্টের চেয়ে বেশি।

4. ভাবো অপর্ণা সেন, বুদ্ধদেব দাশগুপ্ত, ছবি বিশ্বাস এবং দেবালয় ভট্টাচার্যের নির্মিত চলচ্চিত্রগুলি এক সমালোচক a,b,c,d রেটিং দিলেন। আশ্চর্যজনকভাবে, এমন একটি মৌলিক সংখ্যা p রয়েছে যাতে $a^p + b^p = c^p + d^p$ হয়। দেখাও, যদি আমরা চারজনের রেটিং এর তুলনা করি, তাহলে $|a - c| + |b - d| \geq p.$ হয়।

   [সূত্র: অপর্ণা সেন number theory, এবং ছবি বিশ্বাস calculus পছন্দ করেন।]

5. ΔABC একটি ত্রিভুজ যার পরিকেন্দ্র O. P, AB র ওপর অবস্থিত একটি বিন্দু যাতে $\angle BOP = \angle ABC$ এবং Q, AC র ওপর অবস্থিত একটি বিন্দু যাতে $\angle COQ = \angle ACB$ । PQ থেকে O এর ওপর লম্ব অঙ্কন করা হল, যা ΔAPQ এর পরিবৃত্তে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমান করো, $\square AECB$ একটি ট্রাপেজিয়াম। OE কে এরূপভাবে বর্ধিত করা হল যাতে BC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমান করো, ΔFPQ এর লম্ববিন্দু O.